Faculté des Sciences et Techniques
Tanger
Département de Mathématiques

Année 2008-2009
MIPC GEGM : 1ere année
Analyse 1 : M112

CONTROLE CONTINUE N° 2

La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviennent pour une partie importante dans l'appréciation de la copie

Problème 1

1) a) Donner le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

b) donner $\left.\dfrac{d^{10}f(x)}{dx^{10}}\right|_{x=0}$

2) a) i) Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $f_1(x) = \ln(1 + \sin(x))$

ii) donner $f_1'(0)$, $f_1''(0)$ et $f_1'''(0)$ et donner l'équation de la tangente à Gf_1 en $(0; f_1(0))$

b) Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $f_2(x) = (1 + \sin(x))^{\frac{1}{x}}$

c) Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $f_3(x) = (1 + tg(x))^{\frac{1}{x}}$

d) Calculer $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{(1+\sin(x))^{\frac{1}{x}} - e^{1-\frac{x}{2}} - \frac{x^2}{6}}{(1+tg(x))^{\frac{1}{x}} - e^{1-\frac{x}{2}} - \frac{2x^2}{3}}$

3) Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $+\infty$ de $g(x) = \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{x}$

Problème 2

1) Soit $F(x) = \displaystyle\int \frac{2\sqrt[3]{x} + x}{\sqrt{x^3 - 8x}}\,dx$ a) montrer que $\dfrac{t^5 + 2t}{t^3 - 8} = t^2 + \dfrac{3}{t-2} + \dfrac{5t+6}{t^2+2t+4}$

b) en posant $x = t^6$, calculer $F(x)$.

2) Soit $I_n = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$. Donner la relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} et Calculer I_1; I_2; I_3 et I_4

3) Soit f une fonction dérivable jusqu'à l'ordre (n+1) sur [a, b], on pose $J_n = \displaystyle\int_a^b (b-x)^n f^{(n+1)}(x)\,dx$

Donner la relation de récurrence entre J_n et J_{n-1} et Calculer J_0, J_1 et J_2

4) Considérons l'intégrale généralisée $K_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt$ où $n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que K_3 est convergente et calculer K_3

b) Montrer que K_n est convergente et calculer K_n pour $n \in \mathbb{N}^*$

Problème 3

Considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 suivante :

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} - 2\frac{dy(x)}{dx} + (1-m^2)y(x) = xe^{kx} \quad (m \in \mathbb{R}^+ \text{et } k \in \mathbb{R})$$

a) donner la solution générale de l'équation sans second membre

b) donner la solution de l'équation complète pour $k \neq 1+m$ et $k \neq 1-m$

c) donner des formes de la solution particulière dans les autres cas.



Institut la centrale CC2 08-09

Problème 1 : 1/ a/ $f(x)=(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$

b/ D'après la formule de Mac-Laurin :

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\dots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)\quad ; 0<\theta<1$$

Par identification : $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\Rightarrow f^{(10)}(0)=\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-9)$

2/ a/ $\sin x=x-\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x)$; $\ln(1+X)=X-\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{3}+X^3\varepsilon(X)$

$$f_1(x)=\ln(1+\sin x)=\ln\left(1+x-\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x)\right)=\left(x-\frac{x^3}{6}\right)-\frac{(x-x^3/6)^2}{2}+\frac{(x-\frac{x^3}{6})^3}{3}+x^3\varepsilon(x)$$

$$=x-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x)$$

b/ $$f_2(x)=(1+\sin x)^{1/x}=e^{1/x\ln(1+\sin x)}=e^{1/x(x-x^2/2+x^3/6+x^3\varepsilon(x))}=e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+x^2\varepsilon(x)}$$

$$=e.e^{-x/2+x^2/6+x^2\varepsilon(x)}=e\left(1+\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}\right)+\frac{(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6})^2}{2}+x^2\varepsilon(x)\right)$$

$$=e\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^2}{8}+x^2\varepsilon(x)\right)=e\left(1-\frac{x}{2}+\frac{7}{24}x^2+x^2\varepsilon(x)\right)$$

c/ $$f_3(x)=(1+\tan x)^{1/x}=e^{1/x\ln(1+\tan x)}=e^{1/x\ln\left(1+\left(x+\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon(x)\right)\right)}$$

$$\ln\left(1+\left(x+\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon(x)\right)\right)=x+\frac{x^3}{3}-\frac{(x+x^3/3)^2}{2}+\frac{(x+\frac{x^3}{3})^3}{3}+x^3\varepsilon(x)=x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon(x)$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+x^3\varepsilon(x)$$

$$f_3(x)=e^{1-x/2+\frac{2x^2}{3}+x^2\varepsilon(x)}=e.e^{-x/2+\frac{2x^2}{3}+x^2\varepsilon(x)}$$

$$=e\left(1+\left(-x/2+\frac{2x^2}{3}\right)+\frac{(-x/2+\frac{2x^2}{3})^2}{2}+x^2\varepsilon(x)\right)=e\left(1-x/2+\frac{2x^2}{3}+\frac{x^2}{8}+x^2\varepsilon(x)\right)$$

$$=e\left(1-\frac{x}{2}+\frac{19x^2}{24}+x^2\varepsilon(x)\right)$$

d/ $$\frac{(1+\sin x)^{1/x}-e^{1-x/2}-\frac{x^2}{6}}{(1+\tan x)^{1/x}-e^{1-x/2}-\frac{2x^2}{3}}=\frac{e(1-\frac{x}{2}+\frac{7}{24}x^2)-e(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8})-\frac{x^2}{6}+x^2\varepsilon_1(x)}{e(1-x/2+\frac{19x^2}{24})-e(1-x/2+\frac{x^2}{8})-\frac{2x^2}{3}+x^2\varepsilon_2(x)}$$

$$=\frac{(4e-4)x^2+x^2\varepsilon_1(x)}{(16e-16)x^2+x^2\varepsilon_2(x)}=\frac{(e-1)+\varepsilon_1(x)}{4e-4+\varepsilon_2(x)}\xrightarrow[x\to0]{}\frac{1}{4}$$

3/ On pose $X=\frac{1}{x}$

$$g(x)=\left(\frac{x+1}{x}\right)^x=\left(\frac{\frac{1}{X}+1}{1/X}\right)^{1/X}=(1+X)^{1/X}=e^{1/X\ln(1+X)}=e^{1/X\left(X-\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{3}-\frac{X^4}{4}+o(X^4)\right)}$$

$$=e^{1-X/2+X^2/3-\frac{X^3}{4}+o(X^3)}=e.e^{-X/2+X^2/3-\frac{X^3}{4}}$$

$$=e\left(1+(-X/2+X^2/3-X^3/4)+\frac{1}{2}\left(-X/2+\frac{X^2}{3}-\frac{X^3}{4}\right)^2+\frac{1}{6}\left(-X/2+\frac{X^2}{2}-\frac{X^3}{4}\right)^3+o(X^3)\right)$$

$$=e\left(1-\frac{X}{2}+\frac{X^2}{3}-\frac{X^3}{4}+\frac{X^2}{8}-\frac{X^3}{12}-\frac{X^3}{12}+\frac{X^3}{48}+o(X^3)\right)$$

$$=e\left(1-X/2+\frac{11X^2}{24}-\frac{7}{16}X^3+o(X^3)\right)=e\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{11}{24}\cdot\frac{1}{x^2}-\frac{7}{16}\cdot\frac{1}{x^3}\right)+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

Problème 2 1/a/ $$t^2+\frac{3}{t-2}+\frac{5t+6}{t^2+2t+4}=\frac{t^2(t-2)(t^2+2t+4)+3(t^2+2t+4)+(5t+6)(t-2)}{(t-2)(t^2+2t+4)}=\frac{t^5+2t}{t^3-8}$$

b/ On pose $x = t^6$ alors $dx = 6t^5\,dt$

$$F(x) = \int \frac{2\sqrt[3]{x} + x}{\sqrt{x^3} - 8x}\,dx = \int \frac{2\sqrt[3]{t^6} + t^6}{\sqrt{t^{18}} - 8t^6} \cdot 6t^5 dt = 6\int \frac{t^5 + 2t}{t^3 - 8}\,dt$$

On a $\frac{5t+6}{t^2+2t+4} = \frac{1}{2}\frac{10t+12}{t^2+2t+4} = \frac{1}{2}\frac{10t+10+2}{t^2+2t+4} = \frac{5}{2}\frac{2t+2}{t^2+2t+4} + \frac{1}{(t+1)^2+3}$

$$F(x) = 6\left(\frac{t^3}{3} + 3\ln|t-2| + \frac{5}{2}\ln(t^2+2t+4) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{t+1}{\sqrt{3}}\right)\right) + K$$

$$= 6\cdot\left(\frac{x^2}{3} + 3\ln(\sqrt[6]{x} - 2) + \frac{5}{2}(\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[6]{x} + 4) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt{3}}\right)\right) + K$$

2/ $I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$ On pose $\begin{cases} u = \frac{1}{(x^2+1)^n} = (x^2+1)^{-n} \\ v' = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} u' = -n(2x)(x^2+1)^{-n-1} \\ v = x \end{cases}$

$$I_n = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\left(\int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^n}\,dx\right)$$

$$I_n = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n(I_n - I_{n+1}) \Longrightarrow I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n + \frac{1}{2n}\left(\frac{x}{(x^2+1)^n}\right)$$

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{Arctan} x$$

$I_2 = \frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}$; $I_3 = \frac{3}{4} I_2 + \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2}$, $I_4 = \frac{5}{6} I_3 + \frac{1}{6}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^4}$

3/ On pose $\begin{cases} u' = f^{(n+1)} \\ v = (b-x)^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = f^{(n)} \\ v' = -n(b-x)^{n-1} \end{cases}$ $J_n = \left[n(b-x)^{n-1} f^{(n+1)}\right]_a^b + n\int_a^b (b-x)^{n-1} f^{(n)}\,dx$

$J_n = a(b-a)^{n-1} f^{(n+1)}(a) + n J_{n-1}$; $J_0 = \int_a^b f'(x)\,dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$

$J_1 = a f^{(2)}(a) + J_0$; $J_2 = a(b-a) f^{(3)}(a) + 2J_1$

4/ Deja Vu

<u>Probleme 3</u> $y'' - 2y' + (1-m^2)y = xe^{kx}$ ($m \in \mathbb{R}^+$, $k \in \mathbb{R}$)

a/ (E'): $y'' - 2y' + (1-m^2)y = 0$, $r^2 - 2r + (1-m^2)r = 0$; $\Delta = 4m^2$

si $m = 0$ alors $r = -\frac{b}{2a} = 1$; $y_1 = (\alpha x + \beta)e^x$

si $m \neq 0$ alors $\Delta > 0$; $r_1 = 1-m$ et $r_2 = 1+m \Rightarrow y_1 = \alpha e^{(1-m)x} + \beta e^{(1+m)x}$

b/ la solution particulière de (E) s'écrit $y_0 = (ax+b)e^{kx}$, car $k \neq 1+m$ et $k \neq 1-m$

$y_0' = (a + kax + kb)e^{kx}$, $y_0'' = (ka + k^2ax + k^2b)e^{kx}$

$y_0'' - 2y_0' + (1-m^2)y_0 = xe^{kx} \rightarrow a = \frac{1}{(k-1)^2 - m^2}$ et $b = \frac{2a(1-k)}{(k-1)^2 - m^2}$

d'où $y = y_1 + y_0 = \alpha e^{(1-m)x} + \beta e^{(1+m)x} + \left(\frac{x}{(k-1)^2 - m^2} + \frac{2a(1-k)}{(k-1)^2 - m^2}\right)e^{kx}$

c/ $y_0 = x(ax+b)e^{kx}$ si $k = 1+m$ ou $k = 1-m$